

# Matematica & Realtà

Fase Locale Gara di Modellizzazione - Test finale 2020-21

Tempo massimo per lo svolgimento: 90 min

Nome ..... Cognome .....

## Sezione Avanzata

Rispondere ai quesiti seguenti motivando brevemente le risposte ed aggiungendo eventualmente un commento sul risultato ottenuto.

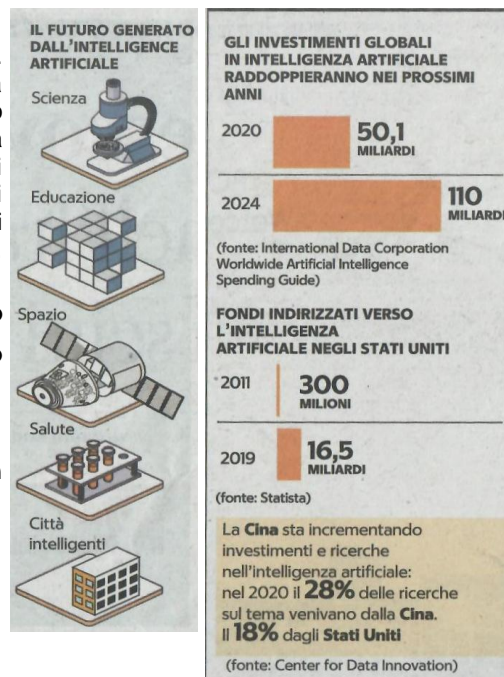
### 1. Intelligenza artificiale la Cina tallona gli USA

La Cina ha superato per la prima volta gli investimenti in ricerca degli Stati Uniti. Pechino è vicino a conquistare anche la leadership mondiale nell'intelligenza artificiale, un insieme di tecnologie con immense potenzialità sia per lo sviluppo economico che per gli usi militari. Vent'anni fa il divario degli investimenti pubblici a favore dell'America sembrava incolmabile, Washington spendeva 300 miliardi di dollari in più all'anno. Il sorpasso è avvenuto dopo che Pechino ha triplicato gli investimenti per la ricerca. Una indicazione analoga viene dal numero di brevetti depositati: quelli cinesi hanno superato gli americani di 100 mila unità in un anno. Fonte: elaborazione M&R su dati la Repubblica, 5 marzo 2021

Il modello seguente descrive gli investimenti (miliardi di dollari) USA verso l'Intelligenza Artificiale a partire dal 2011  $i(t) = 0,3e^{kt}$   $t \geq 0$  ove il tempo è espresso in anni.

1.1. Stimare la costante  $k > 0$ .

1.2. Sulla base del modello stabilire se l'investimento del 2020 è il linea con il trend precedente.



Svolgimento. 1.1. Dal grafico si evince che gli investimenti USA in Intelligenza artificiale del 2019 ammontano a 16,5 miliardi, per cui si deve avere

$$i(8) = 16,5 \Leftrightarrow 0,3e^{8k} = 16,5 \Leftrightarrow e^{8k} = 55$$

da cui

$$k = \frac{\ln 55}{8} \cong 0,5$$

Pertanto il modello è il seguente (vedi anche immagine a lato)

$$i(t) = 0,3e^{0,5t} \quad t \geq 0$$

1.2. L'entità degli investimenti prevista dal modello è pari a

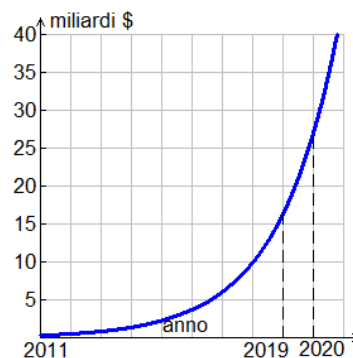
$$i(9) = 0,3e^{9 \cdot 0,5} \cong 27,0051$$

cioè circa 27.005 milioni di dollari.

Invece gli investimenti reali USA sono stati pari al 18% dell'intera cifra, cioè 50,1 miliardi di dollari (vedi immagine): precisamente solo 9.018 milioni di dollari!

Evidentemente c'è stato un netto rallentamento: gli investimenti sono stati circa 1/3 di quelli previsti dal modello.

**Commento.** La Cina invece ha investito il 28% dell'intera cifra, pari a circa 14.028 milioni di dollari!



## 2.1. Una zebra a pois

Nell'autunno 2019 nella riserva di Masai Mara in Kenya è stata avvistata la prima zebra a pois.

Tira (dal nome della guardia forestale che l'ha avvistata) è diventata subito una star dei social. Branda Larison (Univ. della California) forse è l'unica a non essere tanto felice per la nascita di Tira poiché ritiene che il suo manto sia l'indice di un'anomalia genetica, frutto di un maggior incrocio fa parenti, che potrebbe portare ad un brusco calo demografico come è accaduto per le giraffe. La specie di zebre cui appartiene Tira è considerata in pericolo di estinzione perché ne rimangono solo 3000 esemplari. Dopo un'accurata ricerca, vagando nella savana kenyota, la ricercatrice ha potuto appurare che oggi il 5% delle zebre dell'area ha anomalie genetiche che alterano il manto. [Fonte: il venerdì, 5.3.2021](#)



### 2.1. Costruire un modello che descriva il fenomeno.

### 2.2. Sulla base del modello, stimare quando il 90% degli esemplari potrebbero presentare anomalie del manto.

Svolgimento. Proponiamo due diverse impostazioni.

a) Prima impostazione: studiamo l'evoluzione del numero delle zebre con manto anomalo.

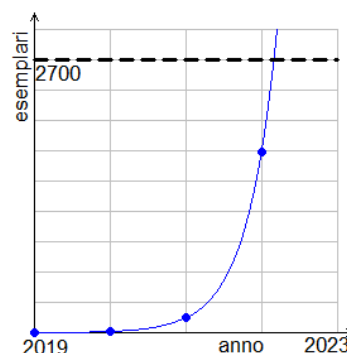
2.1. Adottiamo un modello *discreto* del tipo  $Z_n = Z_0 k^n$   $n = 0, 1, 2, \dots$  ove  $Z_n$  denota il numero delle zebre all' $n$ -esimo anno, ove l'anno zero corrisponde al 2019.

Dai dati si deduce che  $Z_0 = 1$  e  $Z_2 = 150$ ; pertanto si deve avere

$$150 = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{150} \cong 12,24$$

e il modello diventa

$$Z_n = (12,24)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



2.2. Il 90% della popolazione di zebre corrisponde a 2700 zebre.

Per rispondere al quesito risolviamo la disequazione

$$(12,24)^n \geq 2700 \Rightarrow n = \frac{\ln 2700}{\ln 12,24} \cong 3,15$$

La soglia del 90% di zebre con il manto anomalo si dovrebbe raggiungere entro il 2023!!!

b) Secondo approccio: studiamo l'evoluzione della percentuale delle zebre con manto anomalo.

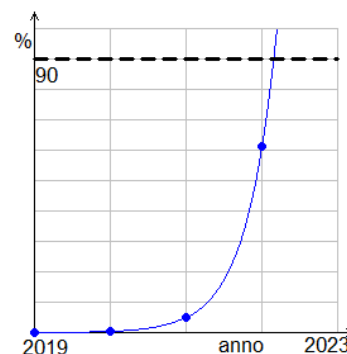
2.1. Adottiamo un modello *discreto* del tipo  $Z_n = Z_0 k^n$   $n = 0, 1, 2, \dots$  ove  $Z_n$  denota la percentuale delle zebre all' $n$ -esimo anno, ove l'anno zero corrisponde al 2019.

Dai dati si deduce che  $Z_0 = 1/3000 = 0,033\%$   $Z_2 = 5\%$ ; pertanto si deve avere

$$5 = 0,033 k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{5}{0,033}} \cong 12,3$$

e il modello diventa

$$Z_n = 0,033 (12,3)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



2.2. Per rispondere al quesito risolviamo la disequazione

$$0,033 (12,3)^n \geq 90 \Rightarrow n = \frac{\ln(90/0,033)}{\ln 12,3} \cong 3,15$$

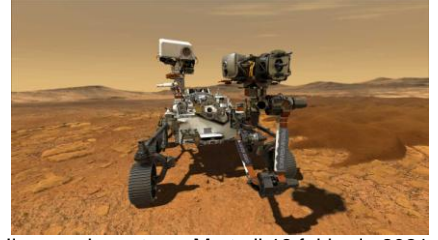
La soglia del 90% di zebre con il manto anomalo si dovrebbe raggiungere entro il 2023!!!

N.B. Naturalmente anche un modello continuo è da considerarsi corretto.

### 3. Come è stressante lavorare "su Marte"

Immaginate se per mesi vi spostassero l'orario di lavoro ogni giorno in avanti di oltre mezz'ora, in modo da passare ad iniziare al mattino, poi in piena notte e quindi all'alba. Un ritmo complicato.

Eppure è la routine a cui si sottoporranno per almeno due anni i 350 tecnici della Nasa che seguiranno il rover *Perseverance* incaricato delle esplorazioni su Marte. Nessuno lo può guidare in diretta perché un segnale radio impiega dai 10 ai 15 minuti per andare e tornare fra Marte e la Terra.



Soluzione? Ogni giorno una squadra attende il tramonto su Marte, quando *Perseverance* invia a terra tutti i dati sulle cose che ha fatto nella giornata, e passa dodici ore ad analizzarli per preparare nuovi ordini ed inviarli al rover prima dell'alba marziana, quando si rimetterà al lavoro. Ma il giorno su Marte dura 24 ore e 39 minuti, il che vuol dire che ogni giorno terrestre il team comincerà e terminerà di lavorare 39 minuti più tardi di quello precedente. [Fonte: il venerdì, 19.3.2021](#)

**3.1. Determinare due funzioni che descrivano l'alternanza giorno-notte su ciascuno dei due pianeti** (per semplicità si assuma uno sfasamento di 40 minuti).

**3.2. Sulla base delle funzioni del punto 1), stabilire il periodo del crono-programma NASA; in altri termini, quanti giorni occorrono affinché la squadra entri al lavoro allo stesso orario?**

Svolgimento. Osserviamo, innanzi tutto, che i periodi del moto di Marte e della Terra (in minuti) sono rispettivamente

$$T_M = 24 \cdot 60 + 40 \quad T_G = 24 \cdot 60$$

Proponiamo ora due diverse impostazioni.

a) Adottiamo una funzione lineare a tratti, che assuma valore 1 di giorno e 0 di notte.

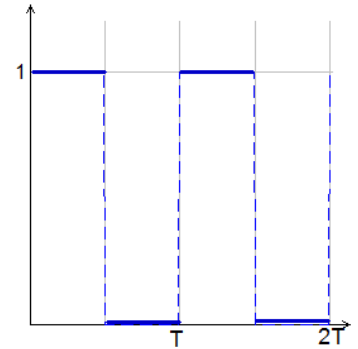
3.1. Assumiamo che al tempo  $t = 0$  le due funzioni siano in fase.

Funzione giorno-notte di Marte:

$$Marte(t) = \begin{cases} 1 & 0 + kT_M \leq t < \frac{T_M}{2} + kT_M \\ 0 & \frac{T_M}{2} + kT_M \leq t < kT_M \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Funzione giorno-notte della Terra:

$$Terra(t) = \begin{cases} 1 & 0 + kT_G \leq t < \frac{T_G}{2} + kT_G \\ 0 & \frac{T_G}{2} + kT_G \leq t < kT_G \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



3.2. Le due funzioni si ritroveranno in fase quando un multiplo intero del periodo di Marte  $hT_M$  coincide con un multiplo intero del periodo della Terra  $kT_G$ . Naturalmente si assume che  $h$  e  $k$  sia la coppia minimale, cioè i due numeri interi siano primi fra loro.

Deve quindi risultare

$$hT_M = kT_G \Leftrightarrow h(24 \cdot 60 + 40) = k(24 \cdot 60)$$

da cui

$$\frac{k}{h} = \frac{24 \cdot 60 + 4}{24 \cdot 60} = \Rightarrow \frac{k}{h} = 1 + \frac{1}{36} = \frac{37}{36} \Rightarrow k = 37 \quad h = 36$$

In conclusione, si troveranno in fase dopo 37 giorni terrestri, o equivalentemente 36 giorni marziani.

Quindi il crono-programma della NASA si ripete ogni 36 giorni.

b) Adottiamo una funzione di tipo sinusoidale, utilizzando di sua rappresentazione in funzione del periodo.

3.1. Assumiamo che al tempo  $t = 0$  le due funzioni siano in fase.

Funzione giorno-notte di Marte:  $Marte(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_M}t\right)$

ove il tempo  $t$  è misurato in minuti e  $T_M = 24 \cdot 60 + 40$  è il periodo di rotazione di Marte.

Funzione giorno-notte della Terra:

$$Terra(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_G}t\right)$$

ove il tempo  $t$  è misurato in minuti e  $T_G = 24 \cdot 60$  è il periodo di rotazione della terra.

3.2. Le due funzioni si ritroveranno in fase quando un multiplo intero  $h$  del periodo di Marte coincide con un multiplo intero  $k$  del periodo della Terra.

Naturalmente si assume che  $h$  e  $k$  sia la coppia minimale, cioè i due numeri interi siano primi fra loro.

Deve quindi risultare

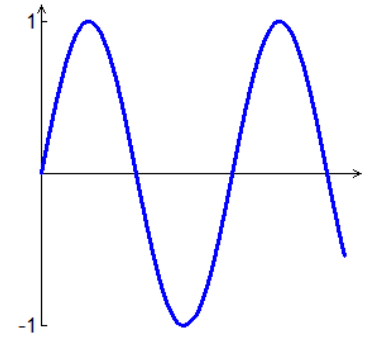
$$hT_M = kT_G \Leftrightarrow h(24 \cdot 60 + 40) = k(24 \cdot 60)$$

da cui

$$\frac{k}{h} = \frac{24 \cdot 60 + 4}{24 \cdot 60} = \Rightarrow \frac{k}{h} = 1 + \frac{1}{36} = \frac{37}{36} \Rightarrow k = 37 \quad h = 36$$

In conclusione, si troveranno in fase dopo 37 giorni terrestri, o equivalentemente 36 giorni marziani.

Quindi il crono-programma della NASA si ripete ogni 37 giorni.



GRIGLIA DI VALUTAZIONE	Punteggio max.	
<b>1. Intelligenza artificiale la Cina tallona gli USA</b>	1.1 risposta	<b>1</b>
	1.1 motivazioni	<b>3</b>
	1.2 risposta	<b>1</b>
	1.2 motivazioni	<b>1</b>
	commento	<b>2</b>
<b>2. Una zebra a pois</b>	2.1 risposta	<b>1</b>
	2.1 motivazioni	<b>4</b>
	2.2 risposta	<b>1</b>
	2.2 motivazioni	<b>2</b>
	commento	<b>2</b>
<b>3. Come è stressante lavorare "su Marte"</b>	3.1 risposta	<b>1</b>
	3.1 motivazioni	<b>4</b>
	3.2 risposta	<b>1</b>
	3.2 motivazioni	<b>4</b>
	commento	<b>2</b>
<b>TOTALE</b>		<b>30</b>

**N.B. Non sono ammesse valutazioni ex-aequo.**

A questo scopo è prevista una valutazione con 2 decimali.

Sono ammessi alla fase finale i primi classificati nella misura del 15% dei **presenti alla semifinale** di ciascuna Unità Locale. Le Sezioni distaccate sono considerate Unità distinte.

Il numero degli ammessi è calcolato (in modo automatico) arrotondando la quota percentuale all'intero inferiore se la parte decimale non supera 0.5, all'intero superiore se la parte decimale supera 0.5