

Matematica & Realtà

I Fase Gara di Modellizzazione - Test finale 2018-2019

Tempo massimo per lo svolgimento: 90 min

Nome Cognome

Tempo impiegato per lo svolgimento (in minuti, da trascrivere a cura del tutore di aula)

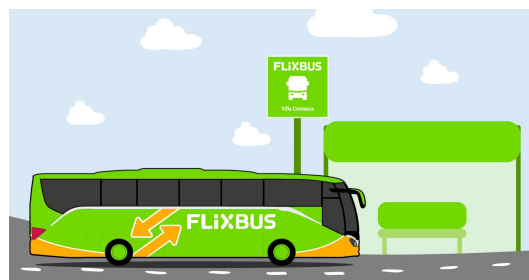
Sezione Avanzata

Rispondere ai quesiti seguenti motivando brevemente le risposte ed aggiungendo eventualmente un commento sul risultato ottenuto.

1. Com'è FLEX il mio bus

Si prenotano in un attimo dallo smartphone, collegano in modo economico lunghi percorsi lasciati scoperti dai treni. Sono le "corriere" degli anni 2000 e il business (giovane) ha messo il turbo. FLIXBUS è la nuova transiberiana. Soprattutto se e quando andrà in porto la travagliata proposta di legge sulla liberalizzazione totale del mercato dei tragitti in pullman e autobus (quelli oltre i 100 km), caldeggiata dalla Commissione europea. Il che significherebbe un aumento del ...11.....% del traffico "su torpedone" entro il 2030, con relativa diminuzione degli inquinanti spostamenti su auto privata.

Fonte: D 2 febbraio 2019



1.1 La funzione $p(t) = 100 \left(\frac{11}{10} \right)^{t/12}$ $t \geq 0$ **descrive il numero dei viaggiatori (milioni) che sarebbero trasportati nel tempo (anni) dal 2018 (anno zero) al 2030 se la legge andasse in porto. Sulla base del modello completare lo spazio dei puntini.**

Fondato in Germania da tre giovani imprenditori, nel 2011, ha in poco tempo varcato i confini ed è passato, solo in Italia, dai 150mila passeggeri e 40 città collegate del 2015 ai 10 milioni di quest'anno, con più di 300 città collegate.

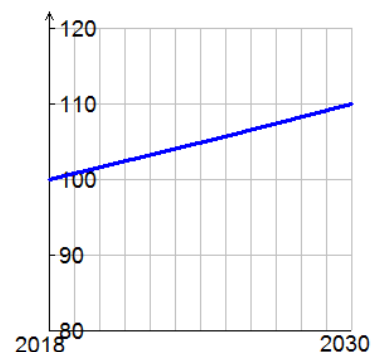
Fonte: D 2 febbraio 2019

1.2 Confrontare il tasso medio annuo Italiano di crescita con quello previsto dal modello del punto 1.1.

Svolgimento. 1.1 La funzione p ha come grafico la curva a lato.

Per rispondere al quesito, valutiamo il rapporto

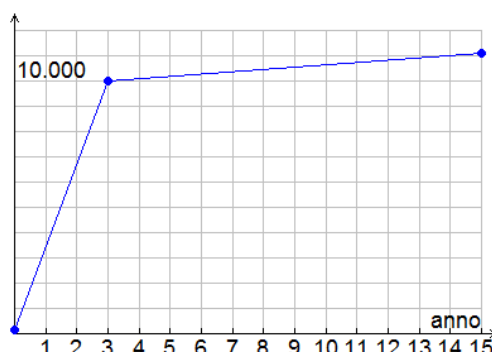
$$\frac{\text{passeggeri 2030} - \text{passeggeri 2018}}{\text{passeggeri 2018}} \cdot 100 = \frac{p(12) - p(0)}{p(0)} \cdot 100 =$$
$$\frac{100 \frac{11}{10} - 100}{100} \cdot 100 = 11\%$$



Svolgimento. 1.2 Per rispondere al quesito, riassumiamo i dati di nostro interesse nella tabella

tempo (anni)	2015	2018	2030
tempo riscaldato	0	3	15
Passeggeri (migliaia)	150	10.000	11.100

Riportiamo quindi i dati in un sistema di riferimento cartesiano



Come si vede bene dal grafico, la crescita di passeggeri di Flixbus in Italia nei primi 3 anni è stata così elevata che il previsto aumento dell'11% nei prossimi 12 anni appare quasi irrisorio.

In effetti il tasso medio annuo di crescita dal 2015 al 2018 è stato pari a oltre 3 milioni di passeggeri all'anno:

$$\frac{10.000.000 - 150.000}{3} \cong 3.283.333$$

che corrisponde ad una percentuale del

$$\frac{10.000.000 - 150.000}{150.000} \cdot 100 \cong 6666 \%$$

in altri termini, nei primi 3 anni, il traffico passeggeri in Italia è cresciuto di oltre 65 volte.

2. Cina regina

Qual è il primo cognome tra i neonati milanesi? Fumagalli? Brambilla? Macché: è Hu. Già perché i cinesi sono una comunità giovane e molto attiva. I primi cinesi ad arrivare in Italia furono cinque, sbarcarono a Napoli nel 1724 assieme a un missionario: volevano imparare il cristianesimo per poi tornare ad evangelizzare. Negli ultimi venti anni invece i cinesi d'Italia, regolarmente soggiornanti, sono passati da 32mila cittadini a 319mila.

Ma è interessante un altro dato, perché racconta il mondo che cambia con la grande ascesa cinese. Nel 2011 il flusso di denaro che i cittadini cinesi spedivano nel loro paese, cioè le rimesse, ammontava a 2,5 miliardi di euro. Però le condizioni di vita nella potenza asiatica sono migliorate sensibilmente e quindi l'ultimo dato delle rimesse è calato di dieci volte: 237 milioni. Chissà magari tra dieci anni saranno i cinesi non emigrati ad aiutare quelli italiani.



Fonte: D 2 febbraio 2019

2.1. Costruire due modelli che descrivano rispettivamente l'aumento della popolazione cinese in Italia e la diminuzione delle rimesse in Cina (formulazione e grafico).

2.2. Sulla base dei modelli, confrontare la remessa media del 2011 con quella del 2018.

Rimessa media 2011

17397,40

Rimessa media 2018

742,95

2.3. La previsione della rivista è confermata dal risultato del punto 2.1?

dipende dal modello adottato

Svolgimento. Riportiamo i dati in una tabella

anno	1998	2011	2018
popolazione cinese (migliaia)	32	220,5	319
Rimesse in Cina (milioni €)		2.500	237

Per modellare entrambi i fenomeni possiamo adottare un modello esponenziale del tipo

$$p(t) = A e^{ht} \quad 0 \leq t \leq 20$$

Andamento popolazione cinese $p(t)$ (migliaia di individui) in Italia nel periodo 1998-2018 (1998 anno zero)

$$\begin{cases} p(0) = 32 \\ p(20) = 319 = 32 e^{20h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = 32 \\ h \cong 0,115 \end{cases}$$

da cui (vedi grafico a lato)

$$p(t) = 32 e^{0,115t} \quad t \geq 0$$

Sulla base del modello possiamo stimare la popolazione cinese in Italia nel 2011

$$p(13) = 142,7 \text{ mila}$$

In modo analogo valutiamo l'andamento delle rimesse (milioni €) dal 2011 al 2018 (anno zero 2011)

$$\begin{cases} r(0) = 2500 \\ p(7) = 237 = 2500 e^{-7k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = 2500 \\ k \cong 0,3365 \end{cases}$$

da cui (vedi grafico a lato)

$$r(t) = 2500 e^{-0,3365t} \quad t \geq 0$$

Valutiamo le rimesse pro/capite (€testa) nei due anni di interesse:

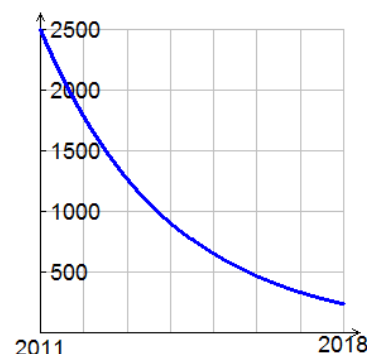
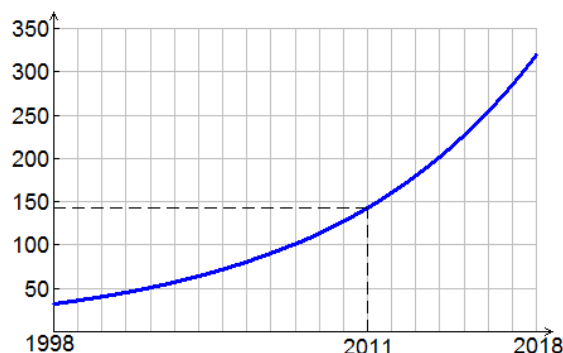
$$\text{- 2011} \quad \frac{2,5 \cdot 10^9}{142700} \cong 17397,40 \text{ €testa}$$

$$\text{- 2018} \quad \frac{237 \cdot 10^6}{319.000} \cong 742,95 \text{ €testa}$$

Le rimesse quindi si sono ridotte secondo il rapporto 23:1

Se si adotta un modello esponenziale per descrivere l'evoluzione delle rimesse verso la Cina dei cinesi in Italia, questo non è adeguato per rispondere al punto 2.3 in quanto, come è noto, la funzione esponenziale del tipo

$$f(t) = A e^{ht} \quad t \geq 0, \quad A > 0 \text{ non assume valore nullo, né negativo.}$$



Una valutazione sarebbe possibile ricorrendo, ad esempio, ad un modello lineare.

3. Yogurt alla frutta

Una ditta distributrice di yogurt alla frutta propone una vaschetta con due scomparti, uno per lo yogurt (bianco) e uno per la frutta; così che la miscelazione possa avvenire solo al momento della consumazione. Assumiamo, per semplicità, che la confezione abbia la forma di prisma a base quadrata di dimensioni interne lato 7 cm, altezza 4 cm e che la separazione delle due vaschette avvenga mediante una sezione trasversale che esca da un vertice del quadrato.



3.1 Costruire un modello che descriva la capacità della vaschetta dello yogurt in funzione dell'inclinazione della sezione trasversale (formulazione e grafico).

N.B. Si tenga presente che a causa dei bordi arrotondati, si perde il 10% della capacità.

3.2 Sulla base del modello, determinare le dimensioni delle due vaschette, compatibili con il contenuto della confezione. N.B. Il peso specifico dello yogurt è circa 1,1.

Svolgimento.

Capacità totale della vaschetta: $C = 0,9 \cdot V = 0,9(7 \cdot 7 \cdot 4) = 176,4 \text{ cm}^3$

Dividiamo la vaschetta in due mediate una sezione trasversale parallela alla diagonale di base CB .

Posto $\widehat{ABP} = \alpha$ risulta

- capacità della vaschetta riservata alla frutta

$$C_{frutta} = 0,9 \cdot V_{frutta} = 0,9 \left(\frac{7 \cdot 7 \tan \alpha}{2} \cdot 4 \right) = 88,2 \tan \alpha \text{ cm}^3$$

- capacità della vaschetta riservata allo yogurt

$$C_{yogurt}(\alpha) = (176,4 - 88,2 \tan \alpha) \text{ cm}^3 \quad 0 < \alpha \leq \pi/4$$

Tenuto conto della densità dello yogurt, la capacità necessaria alla confezione è

$$\frac{115}{1,1} = 104,5 \text{ cm}^3.$$

Risolviendo pertanto l'equazione

$$176,4 - 88,2 \tan \alpha = 104,5 \Rightarrow \tan \alpha \approx 0,81$$

si ottiene l'angolo di inclinazione della sezione trasversale:

$$\alpha \approx 0,68 \text{ radianti equivalente a circa } \alpha \approx 39^\circ$$

E' immediato calcolare le dimensioni incognite delle due vaschette:

- vaschetta frutta: $\overline{AP} = 5,67 \text{ cm}$

- vaschetta yogurt: $\overline{PC} = 1,33 \text{ cm}$

