

Matematica & Realtà

Fase Locale Gara di Modellizzazione - Test finale 2019-20

Tempo massimo per lo svolgimento: 90 min

Nome Cognome

Sezione Avanzata

Rispondere ai quesiti seguenti motivando brevemente le risposte ed aggiungendo eventualmente un commento sul risultato ottenuto.

1. L'Antartide diventa VERDE

Il nostro ghiaccio artico sta lentamente "fiorendo"... ma non c'è da festeggiare. Un tempo lo spessore dei ghiacci non permetteva ai raggi solari di passare; oggi invece, per l'innalzamento della temperatura, le sue dimensioni sono decisamente diminuite, lasciando così filtrare la luce che fa fiorire il fitoplancton, ovvero microscopiche alghe che diventano sempre più verdi, cambiando così il colore di vaste zone artiche.

Un gruppo di ricercatori dell'Università di Harvard ha notato che, se nel 1995 la percentuale di superficie ghiacciata con uno spessore tale da consentire il passaggio della luce era del 3 per cento, in venti anni è cresciuta di 10 volte.

Mi domando cosa accadrà se andremo avanti di questo passo ...

Fonte: Famiglia Cristiana, 30 aprile 2017



1.1. Costruire un modello matematico che descriva il fenomeno (formulazione e grafico).

1.2. Sulla base del modello, stimare quanto si sarà ridotta alla fine di quest'anno la superficie del ghiaccio artico che non consente passaggio dei raggi luminosi.

Svolgimento.

1.1. Innanzi tutto possiamo adottare un riscaldamento dei tempi, ponendo il 1995 come anno zero. Possiamo quindi sintetizzare i dati a nostra disposizione nella tabella

anno	Superficie (%)
0	3
20	30

Possiamo rappresentare il fenomeno attraverso un modello discreto oppure un modello continuo.

(Modello discreto) Per descrivere il fenomeno possiamo adottare un modello esponenziale del tipo

$$s_n = s_0 k^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ove s_n è la percentuale di superficie nell' n-esimo anno (a partire dal 1995).

Sulla base dei dati deve risultare

$$\begin{aligned} s_0 &= 3 \\ s_{20} &= 3k^{20} = 30 \end{aligned}$$

da cui

$$k^{20} = 10 \Rightarrow k = \sqrt[20]{10} \cong 1,122$$

In definitiva si ha

$$s_n = 3(1,122)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Modello continuo) Adottiamo un modello esponenziale del tipo

$$s(t) = s(0)e^{ht} \quad t \geq 0$$

ove $s(t)$ è la percentuale di superficie al tempo t .

Sulla base dei dati deve risultare

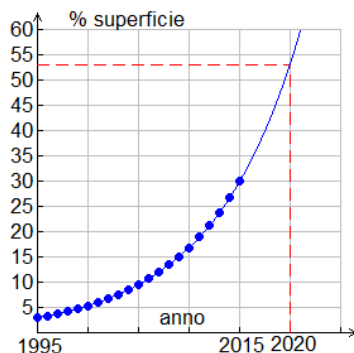
$$\begin{aligned} s(0) &= 3 \\ s(20) &= 3e^{20h} = 30 \end{aligned}$$

da cui

$$20h = \log 30 - \log 3 \Rightarrow h = \frac{\log 10}{20} \cong 0,115$$

In definitiva si ha

$$s(t) = 3e^{0,115t} \quad t \geq 0$$



1.2. Osservato che il 2020 corrisponde all'anno 25-esimo dall'inizio dello studio, sulla base del modello, si ha

$$(1,122)^{25} \cong 53,3265$$

cioè alla fine dell'anno la percentuale di superficie di ghiaccio artico che consente di far passare i raggi luminosi sarà circa il 53%.

In definitiva quella che non consente di far passare i raggi luminosi sarà passata dal 97% (anno 1995) al 47% (anno 2020), con una riduzione di 50 punti, che in percentuale ammonta a quasi il 52%.

Commento. Una notizia certamente non positiva, vista anche la velocità con cui il fenomeno sta avvenendo! La superficie che non consente di far passare i raggi luminosi si è più che dimezzata in soli 25 anni. Se il trend non si modifica, prima del 2050 si sarà ridotta a meno di 1/4.

2. La volata di Airbnb fa paura agli hotel

Airbnb¹ vola e fa arrabbiare gli albergatori.

Una crescita esponenziale che non accenna a fermarsi.

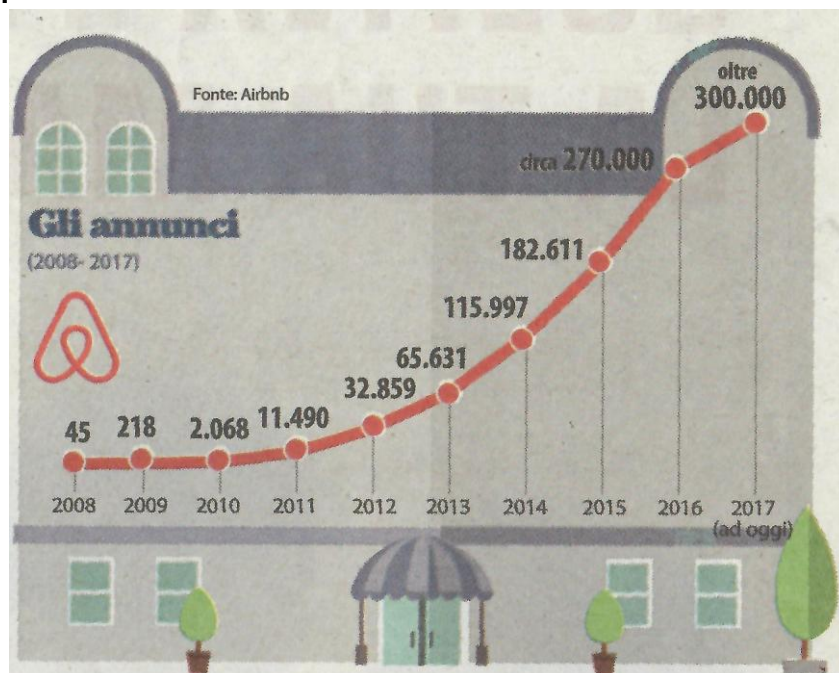
Le strutture censite dall'ISTAT sono invece solo 103.459.

Al contrario, stando al "Barometro del turismo" di Federalberghi, le presenze alberghiere sono cresciute solo dello 0,9% nell'ultimo anno. La lepre e la lumaca.

E' tutta colpa della *concorrenza sleale* se gli alberghi italiani arrancano e gli affitti da privati volano? Il sito *Osservaitalia* rivela che una camera in un 5 stelle a Milano costa 716 dollari a notte contro i 576 di Londra e i 408 di Parigi, capitale mondiale del turismo.

Airbnb quest'anno prevede di raccogliere solo in Italia 30 milioni di notti turistiche; due anni fa, nel 2015, erano 3,6 milioni.

Fonte: la Repubblica, 14 maggio 2017, elaborazione dati M&R



2.1. I dati dell'immagine confermano l'affermazione di una crescita esponenziale dell'offerta Airbnb?

Il seguente modello $A(t) = 65631 \cdot (1,6)^t \quad t \geq 0$ descrive il numero degli annunci su Airbnb nel periodo 2013-2016

Sulla base del modello:

2.2. Stimare il numero medio di pernottamenti previsti per singolo annuncio nel 2017.

2.3. Se il trend fosse proseguito dopo il 2017, quanto sarebbe stato il numero degli annunci nel 2020 (naturalmente senza l'emergenza Covid-19)?

¹ Airbnb è un portale online che mette in contatto persone in cerca di un alloggio o di una camera per brevi periodi, con persone che dispongono di uno spazio extra da affittare, generalmente privati. Il sito fu aperto nell'ottobre del 2007 da Brian Chesky, Joe Gebbia e Nathan Blecharczyk. Al giugno 2012 contava alloggi in oltre 26.000 città in 192 paesi e raggiunse 10 milioni di notti prenotate in tutto il mondo. Fonte: www.wikipedia.it

Svolgimento.

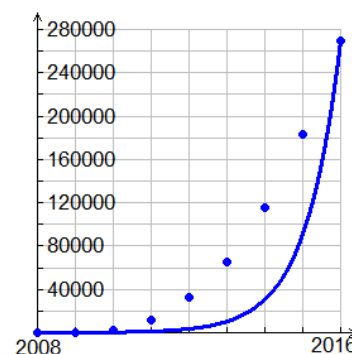
2.1. La crescita degli annunci è un fenomeno esponenziale se e solo se la successione dei dati costituisce una progressione geometrica.

Calcoliamo pertanto il rapporto fra due dati consecutivi (vedi tabella a lato).

Essendo evidente che i rapporti sono lontani dall'essere costanti, possiamo affermare che la crescita non sia stata esponenziale.

anno	n. annunci	rapporto
2008	45	
2009	218	4,84
2010	2068	9,49
2011	11490	5,56
2012	32859	2,86
2013	65631	2,00
2014	115997	1,77
2015	182611	1,57
2016	270000	1,48

Per valutare graficamente l'errore commesso nell'articolo (commento del testo supportato da un'immagine ingannevole) potremmo rappresentare in uno stesso grafico i dati e la curva esponenziale $f(t) = 45 \cdot (2,96)^t$ che unisce il primo e l'ultimo dato.



2.2. Da quanto visto al punto 2.1, si evince che i dati dell'ultimo periodo sono vicini ad essere una successione geometrica.

Infatti la curva proposta da M&R, che interpola il primo e ultimo dato, si presenta come una ragionevole rappresentazione dell'andamento del fenomeno (vedi immagine a lato).

Sulla base del modello, possiamo prevedere che nel 2017 si avrebbe avuto un numero di annunci (offerta) pari a

$$A(4) = 65631 \cdot (1,6)^4 \cong 430119$$

Secondo il testo dell'articolo sarebbero state previste 30 milioni di notti (domanda). In media quindi si avrebbero

$$\frac{30 \cdot 10^6}{430119} \cong 70 \text{ notti/annuncio.}$$

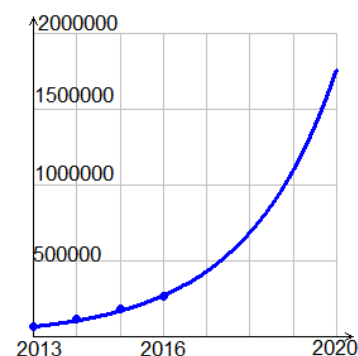
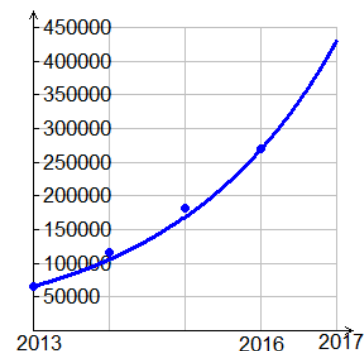
Commento. La soluzione mostra una relazione offerta-domanda per gli Airbnb che non sembra così soddisfacente!

2.3. Secondo il modello, il numero degli annunci del 2020 sarebbe stato pari a

$$A(4) = 65631 \cdot (1,6)^7 \cong 1.771.770$$

Commento. Probabilmente un dato poco realistico!

A dimostrazione che l'affermazione *crescita esponenziale* va presa con le molle!!!

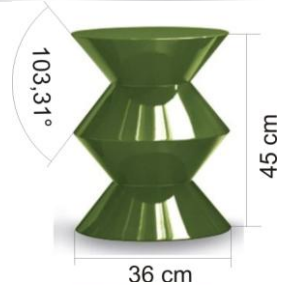


3. Oggetto o scultura?

Cesar, disegnato da Rodolfo Dordoni, è tavolino e pouf ed è caratterizzato da segni grafici dal forte impatto decorativo. Quest'anno per il suo 15esimo compleanno, la ditta Minotti ha deciso di ampliare la gamma dei colori. Per ambientarsi con disinvoltura negli spazi più differenti, anche all'esterno, oggi il pouf-tavolino è proposto in una palette cromatica di 21 colori. [Fonte: D, 2 novembre 2019; minotti.com](#)



3.1. La scheda tecnica del tavolo versione A (vedi immagine a lato), fornisce alcune dimensioni. Completare l'informazione determinando il diametro minore.



3.2. In base alle informazioni del punto 3.1, completare la scheda tecnica della versione B (vedi immagine a lato).



Svolgimento.

3.1. Facendo riferimento alla figura a lato dobbiamo determinare la misura del segmento \overline{VB} .

Osserviamo che $\overline{VB} = \overline{KC} = \overline{HC} - \overline{HK} = 36 - \overline{HK}$

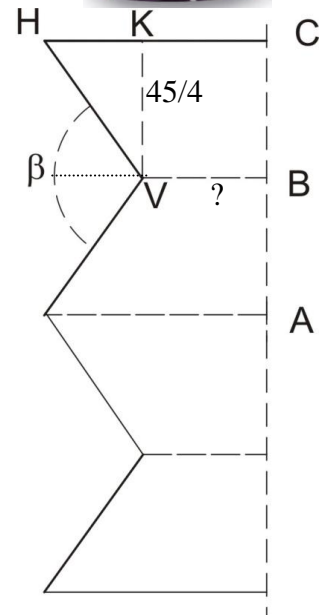
Per determinare \overline{HK} consideriamo il triangolo rettangolo HKV .

Osservato che $\overline{VK} = 45/4$, in virtù di una nota relazione trigonometrica, risulta

$$\overline{KH} = \overline{VK} \cdot \tan H\hat{V}K = \frac{45}{4} \cdot \tan \left(90 - \frac{103,31}{2} \right) \cong 8,9 \text{ cm}$$

da cui si deduce

$$d_{\text{minore}} = d_{\text{maggiore}} - 2\overline{HK} \cong 36 - 18 = 18 \text{ cm}$$



3.2. Facendo riferimento alla figura a lato dobbiamo determinare la misura dell'angolo β . Osservato che $\beta = \pi - 2H\hat{V}K$, determiniamo l'angolo $H\hat{V}K$.

A questo proposito consideriamo il triangolo rettangolo HKV .

In virtù di una nota relazione trigonometrica, risulta

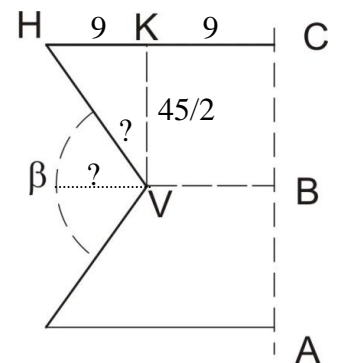
$$\tan H\hat{V}K = \frac{\overline{KH}}{\overline{VK}} \cong \frac{9}{45/2} = \frac{2}{5}$$

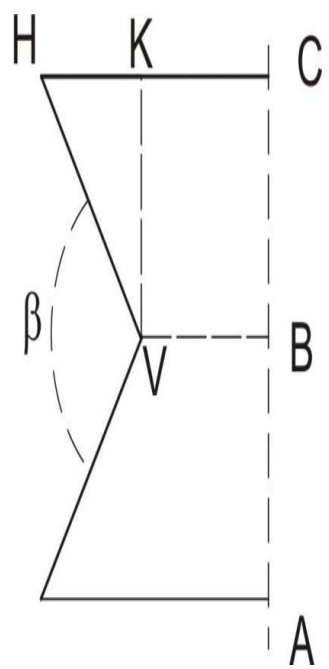
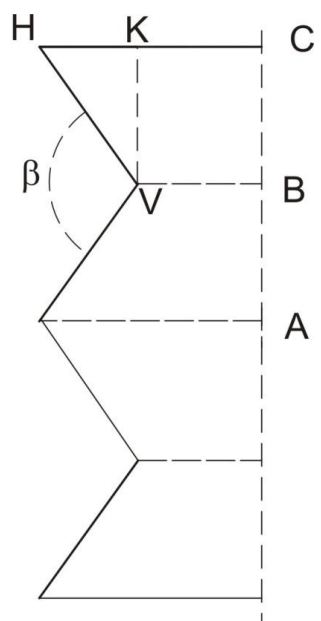
da cui si deduce

$$H\hat{V}K = \arctan \frac{2}{5} \cong 0,38 \text{ rad} \cong 21,8^\circ$$

In definitiva

$$\beta = 2 \cdot (90 - H\hat{V}K) \cong 136,4^\circ$$





GRIGLIA DI VALUTAZIONE	Punteggio max.	
1. L'Antartide diventa VERDE	1.1 risposta	1
	1.1 motivazioni	3
	1.2 risposta	1
	1.2 motivazioni	1
	commento	2
2. La volata di Airbnb fa paura agli hotel	2.1 risposta	1
	2.1 motivazioni	3
	2.2 risposta	1
	2.2 motivazioni	2
	2.3 risposta	1
	2.3 motivazioni	2
	commento	2
3. Oggetto o scultura?	3.1 risposta	1
	3.1 motivazioni	3
	3.2 risposta	1
	3.2 motivazioni	3
	commento	2
TOTALE		30
<p>N.B. Non sono ammesse valutazioni ex-aequo. A questo scopo è prevista una valutazione con 2 decimali. Sono ammessi alla fase finale i primi classificati nella misura del 15% dei presenti alla semifinale di ciascuna Unità Locale. Le Sezioni distaccate sono considerate Unità distinte. Il numero degli ammessi è calcolato (in modo automatico) arrotondando la quota percentuale all'intero inferiore se la parte decimale non supera 0.5, all'intero superiore se la parte decimale supera 0.5</p>		